2. Hausübung zur Analytischen Mechanik und Speziellen Relativität, WS 2016/17

(abzugeben am Dienstag, 08.11.2016)

Aufgabe H03 *Pion-Zerfall* (4 Punkte)

Ein Pion zerfalle in ein Myon und ein Myon-Neutrino:

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu \; .$$

Die Massen von Pion und Myon sind $m_\pi = 273,13\,m$ und $m_\mu = 206,77\,m$ in Einheiten der Elektronmasse m; das Neutrino kann in guter Näherung als masselos angenommen werden. Bestimmen Sie die Verteilung der Gesamtenergie nach dem Zerfall. Welche Anteile entfallen auf die kinetischen Energien des Myons und des Neutrinos?

Hinweise:
Betrachten Sie den Prozess im Schwerpunkt-System (= Ruhesystem des Pions) und setzen Sie $c = 1$. Stellen Sie die Energie-Impuls-Bilanz auf in der Form $p_\mu = p_\pi - p_\nu$ mit den Viererimpuls-Vektoren der beteiligten Teilchen. Quadrieren Sie diese und benutzen Sie die Energie-Impuls-Beziehung, um $|\vec{p}_\nu|$ und $|\vec{p}_\mu|$ zu berechnen. Die kinetische Energie eines Teilchens ist $T = E - mc^2$.

Aufgabe H04 *Boost eines Coulomb-Feldes* (6 Punkte)

Eine positive Punktladung bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ zu einem ruhenden Beobachter entlang dessen x-Achse. Im mit der Ladung mitbewegten Koordinatensystem lautet das Viererpotential (in Einheiten von $c = 1$)

$$A'^\mu(x') = \begin{pmatrix} \phi'(x') \\ \vec{A}'(x') \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \phi'(x') = \frac{q}{4\pi|\vec{x}'|} \quad \text{und} \quad \vec{A}'(x') \equiv 0 \; .$$

Welches Viererpotential $A^\mu(x)$ sieht der ruhende Beobachter? Welches elektrische und magnetische Feld misst er? Bestätigen Sie, dass das Magnetfeld durch die Bewegung erzeugt wird: $\vec{B} \stackrel{?}{=} \vec{v} \times \vec{E}$. Wie sehen die elektrischen Feldlinien bei $t = 0$ aus?

Hinweise:
Finden Sie zunächst die zuständige Lorentz-Transformation und wenden Sie sie auf $A'^\mu(x')$ an, um $A^\mu(x')$ zu erhalten. Dann müssen Sie noch x' durch x ausdrücken und lesen $\phi(x)$ und $\vec{A}(x)$ ab. Die Felder $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ erhalten Sie entweder durch Differenzieren Ihrer Lösung $(\phi, \vec{A})$ vermöge

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\phi \qquad \text{und} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

(in Komponenten) oder aber direkt durch Lorentz-Boosten des Coulomb-Feldes $\vec{E}' = \frac{q}{4\pi}\frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|^3}$ und $\vec{B}' \equiv 0$ mit Formeln aus Vorlesung oder Literatur. Für die Feldlinien vergleichen Sie die Amplitude $|\vec{E}|(t{=}0, \vec{x})$ bei $\vec{x} = (R, 0, 0)$ mit der bei $\vec{x} = (0, R, 0)$. Höhere Feldstärke bedeutet größere Feldliniendichte.